

## COMBINATORIA

### Principio fundamental de la adición

*Si una primera tarea o elección puede realizarse de  $m$  formas, mientras que una segunda tarea o elección puede realizarse de  $n$  formas, y no es posible realizar ambas tareas de manera simultánea, entonces, para llevar a cabo cualquiera de ellas pueden utilizarse cualquiera de las  $m+n$  formas posibles.*

#### Ejemplo1:

La biblioteca de una universidad tiene 40 libros de texto de sociología y 50 de antropología. Un estudiante desea aprender algo nuevo de cualquiera de estos dos temas, pero por su tiempo disponible solamente se va a inclinar por la elección de un libro de cualquiera de los dos temas. ¿Cuántas opciones tiene?

#### Ejemplo 2:

Un estudiante debe elegir un ejercicio para entregar. En una lista de ejercicios hay 15, en otra 20 y en otra 10. ¿Cuántos ejercicios tiene el estudiante para elegir?

### Principio fundamental de la multiplicación

Comenzaremos con situaciones sencillas en las que aplicaremos algunas estrategias en su resolución que luego generalizaremos.

#### Ejemplo3:

Carlos va a una tienda de discos con el propósito de adquirir dos CDs, uno de "La vela puerca" y otro de "No te va a gustar". En el local se encuentran disponibles tres discos de "La vela" y dos de "NTVG". ¿De cuántas formas puede elegir los CDs que va a comprar?

#### Ejemplo4:

Un matrimonio quiere comprar una TV y un reproductor de DVD; el local donde realizarán la compra dispone de cuatro modelos distintos de reproductores de DVD y tres marcas distintas de TV. ¿De cuántas formas distintas pueden comprar de ambos objetos a la vez?

### Principio fundamental de la multiplicación:

*Si una experiencia puede efectuarse de  $n$  formas diferentes y una vez realizada una de ellas, una segunda experiencia puede realizarse de  $p$  formas distintas, entonces el número total de formas diferentes en que pueden realizarse ambas experiencias a la vez es  $n \times p$ .*

### Ejercicios:

1. Un docente de ciencias de la computación tiene 5 tomos de libros, para cada uno de estos temas: APL, BASIC, FORTRAN y PASCAL.

Un estudiante le pide un libro prestado ¿ De cuantas maneras puede hacer la selección de ese libro?

2. Supongamos el mismo caso del ejemplo anterior, pero ahora el estudiante le pide prestado un libro sobre cada tema. ¿Cuántas formas tiene de hacer la selección de esos 4 libros?
3. Juan sale a cenar a un restaurante y en el menú tiene ocho opciones de plato principal y siete opciones de postre.
  - a) ¿De cuántas formas distintas puede esta persona pedir un plato y un postre?
  - b) Si además tiene seis opciones distintas para elegir la bebida. ¿De cuántas formas distintas puede hacer el pedido completo para la cena (un plato, una bebida y un postre)?
  
4. Tres personas suben a un ómnibus en el que hay cinco asientos libres. ¿De cuántas formas distintas pueden ocupar sus asientos?
  
5. Una persona tiene ocho pantalones diferentes y doce camisas diferentes. ¿De cuántas formas distintas puede vestirse?
  
6. Un local de comidas al paso ofrece cinco tipos de carnes diferentes, seis tipos de ensalada, cuatro postres y ocho gustos de bebidas. ¿De cuántas formas distintas se puede ordenar una comida completa? (nota: una comida completa consiste en una porción de carne, una ensalada, un postre y una bebida)
  
7. ¿De cuántas formas podemos clasificar una persona a la cual se le hace una encuesta en relación al sexo (F, M), estado civil (S, C, V, D, UL)?
  
8. En un baile hay diez chicas y siete varones. Suponiendo que cada varón baila con cada una de las chicas. ¿Cuántas parejas distintas de baile se pueden formar?
  
9. De la ciudad A a la B hay tres caminos y de la B a la C hay ocho caminos. ¿Cuántos caminos hay desde A a C que pasan por B?
  
10. De las ciudades del ejercicio anterior, se sabe que de la ciudad C a la ciudad A hay cinco caminos.
  - a) ¿De cuántas formas se puede realizar un tour que vaya de la ciudad B a C, luego de C a A y finalmente de A a B?
  - b) ¿De cuántas formas si el tour se realiza desde la ciudad B a A, luego de A a C y finalmente de C a B?
  
11. Con todos los dígitos:
  - a) ¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar?
  - b) ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar?
  - c) ¿Cuál es la respuesta de las preguntas anteriores si los números formados son de seis cifras? (nota: 023, 012, etc. . no serán considerados de tres cifras)

**Problema:**

Nicolás ha decidido ver seis películas en sus vacaciones, una sola vez cada una. Quiere establecer un orden para ello. ¿De cuantas formas distintas puede hacerlo?

**Problema:**

En una carrera intervienen 6 corredores a, b, c, d, e, y f ¿cuántos resultados diferentes pueden darse?

**Permutaciones**

*Sea un conjunto  $E$  de  $m$  elementos distintos. Se llama permutaciones de  $m$  elementos, a los grupos que se pueden formar con los  $m$  elementos distintos del conjunto  $E$  tales que dos grupos cualesquiera son distintos si difieren en el orden que están dispuestos sus elementos.*

$$P_m = m(m-1)(m-2)\dots 3.2.1$$

**Problema:**

¿Cuántos números de tres cifras puedo formar con los siguientes dígitos: 2, 5, 6, 8 y 9 sin repetir ninguno?

**Arreglos sin repetición**

*Sea un conjunto  $E$  de  $m$  elementos distintos y un número natural  $n$  tal que  $1 \leq n \leq m$ , llamamos arreglos de  $m$  elementos agrupados de a  $n$ , a los grupos de  $n$  elementos distintos elegidos de entre los  $m$  del conjunto  $E$ , tales que dos grupos cualesquiera son distintos si difieren por lo menos en un elemento o en el orden de colocación de ellos.*

$$A_n^m = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

- 1) Con los dígitos: 1, 2, 3, 4 y 5 ¿cuántos números de cinco cifras, sin repetición, se pueden formar?. [120 números]
  - A. ¿Cuántos de esos números empiezan por 1?. [24]
  - B. ¿Cuántos terminan en 5?. [24]
  - C. ¿Cuántos empiezan por 1 y acaban en 5?. [6]
  - D. ¿Cuántos son pares?. [48]
  - E. ¿Cuántos son múltiplos de 5?. [24]
  - F. ¿Cuántos son mayores que 20.000?. [96]
  
- 2) Al formar palabras de cinco letras con las letras de la palabra **EQUATIONS** :
  - A. ¿Cuántas consisten sólo en vocales? [120]
  - B. ¿Cuántas contienen todas las consonantes? [600]
  - C. ¿Cuántas comienzan con E y terminan en S? [210]
  - D. ¿Cuántas comienzan por consonantes? [6720]
  - E. ¿Cuántas contienen la N? [8400]
  - F. ¿Cuántas hay en las que las vocales y las consonantes se alternan? [1200]
  - G. ¿Cuántas hay en las que Q está seguida de U? [840]
  
- 3) Con las letras de la palabra **CINEMA** ¿Cuántas palabras distintas, tengan sentido o no, se pueden formar?. [720]
  - A. ¿Cuántas terminan en A?. [120] B. ¿Cuántas empiezan con N?. [120]
  - C. ¿Cuántas empiezan con C y terminan en I?. [24] D. ¿Cuántas empiezan con vocal?. [360]
  - E. ¿Cuántas tienen vocal y consonante alternadas?. [72]

### Combinaciones

En los problemas resueltos anteriormente el orden en que se distribuyen los elementos juega un papel fundamental; por ejemplo si queremos formar palabras de dos letras sin repetir con las letras L y A, obtenemos resultados distintos cuando tomamos primero la letra L y luego la A (formando la palabra LA) que cuando cambiamos el orden colocando primero la A y luego la L (formando la palabra AL).

Existen problemas en los que el orden en que tomamos los elementos no afecta la situación y por lo tanto no podemos usar las herramientas que tenemos. Para poder resolver éstos definiremos nuevos conceptos.

**Problema:**

Tomemos cuatro puntos distintos sobre una circunferencia ¿Cuántos triángulos distintos se pueden construir cuyos vértices se encuentren sobre tres de ellos?

Los 4 triángulos que se pueden formar

ABC	ACB	BAC	BCA	CAB	CBA
ABD	ADB	BAD	BDA	DAB	DBA
ACD	ADC	CAD	CDA	DAC	DCA
BCD	BDC	CBD	CDB	DBC	DCB

Distintas formas de escribir el mismo triángulo

ABC , ABD , ACD y BCD

**Problema:**

Supongamos que se dispone de las siguientes bebidas: whisky, Ron, Cognac, Gin y Vodka. ¿Cuántos cócteles diferentes se pueden realizar mezclando tres bebidas distintas en igual cantidad? (Suponiendo que las 5 bebidas se pueden mezclar entre sí)

### Combinaciones

Sea un conjunto **E** de **m** elementos distintos y **n** un número natural tal que  $n \leq m$ , llamamos combinaciones de **m** elementos agrupados de a **n**, a los grupos de **n** elementos distintos elegidos de entre los **m** del conjunto **E**, tales que dos grupos cualesquiera son distintos si difieren por lo menos en un elemento.

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)n!!}$$

## Ejercicios:

1. En una clase de 68 alumnos hay que nombrar delegado y subdelegado. ¿De cuántas maneras podemos hacerlo?
2. En una liga de baloncesto juegan 20 equipos, todos contra todos dos veces (ida y vuelta). ¿Cuántos partidos se habrán jugado al final de la misma?
3. Si en un vagón de tren hay diez asientos, ¿De cuántas maneras posibles pueden sentarse siete personas?
4. Juan quiere dar una fiesta para algunos de sus amigos. Debido al tamaño de su casa, sólo puede invitar a 11 de sus 20 amigos. ¿De cuántas formas puede seleccionar a los invitados?
5. Una persona que sale de vacaciones desea llevarse 4 libros para leer: dispone de 4 novelas policiales y 6 libros de cuentos cortos. ¿De cuántas formas puede hacer la elección si quiere llevar al menos una novela?
6. Con los dígitos 0,1,2,3,4,5,6 ¿Cuántos números de tres cifras sin repetir se pueden formar?
7. En un departamento los vehículos se matriculan con dos vocales y tres cifras (sin repetir), en ese orden; ejemplo AU 317. Calcular cuántos vehículos pueden matricularse en dichas condiciones.
8. Pensar el problema anterior, pero ahora asumir que se pueden repetir las vocales y los dígitos.
9. ¿De cuántas maneras pueden colocarse 4 personas en una fila para sacar entradas para el cine?
10. De un mazo de barajas, se extraen dos al azar ¿de cuántas formas distintas puedo extraer 2 copas? ¿De cuántas formas distintas puedo extraer dos números menores que 5?
11. Una caja fuerte se abre mediante una cierta clave de 5 dígitos (sabemos que los dígitos no se repiten). Ud. es lo suficientemente audaz como para intentar abrirla, y lo hace probando números al azar. ¿Cuántas claves posibles hay? ¿Cuántas claves posibles hay si se usan sólo los dígitos de 1 a 6 en vez de usar los 10? Responde las preguntas anteriores, pero asuma ahora que se pueden repetir los dígitos.
12. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar 8 libros en un estante si dos de ellos deben estar siempre juntos?
13. ¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden formar con los dígitos, sin repetirlos, si se debe empezar con el número 3?
14. ¿De cuántas maneras se puede formar un comité de 5 personas de un total de 12?
15. ¿De cuántas maneras se puede formar un comité de 4 personas, de un total de 8, si una de ellas debe estar siempre incluida?
16. La única forma segura de sacar el 5 de oro es realizando todas las jugadas posibles. ¿Cuánto dinero tendría que gastar si el precio de cada jugada es \$30?
17. En una librería hay una oferta de lapiceras, es un saldo de 50 lapiceras de las cuales 10 son defectuosas. El precio es 3 por \$ 5, con la condición de que se eligen al azar las tres sin la posibilidad de probarlas. ¿De cuántas formas distintas puedo elegir las tres lapiceras? ¿De cuántas formas distintas puedo elegir las tres defectuosas? ¿De cuántas formas distintas puedo tomar una defectuosa y dos sanas?